Strumenti matematici per l'analisi economica

Alessandro Piergallini*e Giorgio Rodano†

marzo 2018

In queste pagine presenteremo in modo semplice gli strumenti formali più importanti che verranno utilizzati nel resto delle lezioni. Non sarà una rassegna rigorosa (per la quale sarebbe necessario ricorrere a un testo di matematica); essa serve solo a familiarizzare il lettore col significato e con l'uso di alcuni strumenti matematici che facilitano molto lo studio della teoria e della politica economica.

L'impiego degli strumenti matematici in economia deriva in gran parte dal fatto che molti ragionamenti economici si svolgono, quasi di necessità, per via di astrazione. Noi osserviamo la realtà e intendiamo spiegarne alcuni aspetti che ci appaiono significativi; tuttavia non tutti gli aspetti della realtà sono egualmente rilevanti per la spiegazione che intendiamo dare. Né, d'altra parte, sarebbe possibile e utile tener conto di tutto ciò che osserviamo. Decidiamo allora di trascurare alcuni di questi elementi, per fissare l'attenzione su quelli che riteniamo decisivi. In questo modo inizia, in genere, la costruzione di un *modello economico*: esso è semplicemente una struttura teorica che contiene al suo interno *solo* quegli elementi e quelle relazioni tra elementi che sembrano *utili* e *rilevanti* ai fini del ragionamento e del problema che stiamo affrontando. Ora, una via che è possibile seguire per formulare adeguatamente un modello economico è di impiegare appunto strumenti matematici. Questi ci consentono infatti di precisare con particolare cura le nostre idee e, al contempo, rendono disponibile un corpo di conoscenze di cui possiamo proficuamente servirci.

1 Variabili e funzioni

Una volta deciso quali sono gli elementi che vogliamo includere nel modello, dobbiamo indicare quali sono le relazioni che intercorrono tra questi elementi.

*Università di Roma Tor Vergata. E-mail: alessandro.piergallini@uniroma2.it.
†Sapienza - Università di Roma. E-mail: giorgio.rodano@uniroma1.it.

Un concetto molto importante al riguardo è quello di *funzione*. Una funzione è semplicemente una regola che descrive la relazione esistente tra alcuni elementi del modello. Gran parte di essi ha una dimensione quantitativa: a essi sono associati dei numeri e questi numeri possono variare. Per esempio, il prezzo di un bene può assumere diversi valori. Si dice allora che questi elementi del modello sono delle *variabili*. Così, possiamo anche dire che una funzione è una regola matematica che descrive la relazione esistente tra le variabili considerate. A ogni valore di una variabile, che indichiamo con x, la funzione fa corrispondere secondo la regola assegnata un *unico* valore di un'altra variabile, che indichiamo con y (naturalmente si possono usare anche altri simboli). Per esempio, la funzione $y = 4 - 2 \cdot x$ descrive la seguente regola per ottenere y: «si deve moltiplicare per 2 il valore assegnato alla x e sottrarlo da 4».

In questo esempio la regola ha una precisa forma algebrica. Accade spesso, tuttavia, che si voglia indicare che esiste un nesso funzionale tra due variabili senza che si sia in grado di precisarlo completamente. In questo caso si usa una nozione più generica e sintetica: si scrive $y = f(x)$, che si legge «y dipende da x» oppure «y è funzione di x». Questa notazione sintetica ci dice semplicemente che esiste una relazione funzionale tra x e y descritta dalla regola $f(\cdot)$. Naturalmente, invece che f, possiamo usare altre lettere per indicare una funzione, come g, h, F ecc. Scriveremo così $y = g(x)$ oppure $y = h(x)$ e così via. Un esempio di funzione generica è costituito dall'affermazione che la quantità domandata di un certo bene dipende dal suo prezzo. Indicando con q la prima variabile e con p la seconda, questa funzione può essere sintetizzata dalla formula $q = D(p)$.

In ogni caso, poiché i valori della y dipendono dai valori che diamo alla x (nell'ultimo esempio i valori della q dipendono dai valori della p), alla y viene dato il nome di *variabile dipendente* mentre alla x si dà quello di *variabile indipendente*. Può darsi spesso il caso che la y dipenda da più variabili indipendenti. Se queste ultime sono due, la formula della funzione può essere scritta nel modo seguente: $y = f(x_1, x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le due variabili indipendenti. In questo caso, l'indice deponente serve appunto a distinguere tra loro le due variabili.

1.1 I grafici

Un modo conveniente per visualizzare una funzione è quello di rappresentarla su un *grafico*. Nella FIGURA 1 troviamo il grafico della funzione $y = 4 - 2x$. Per ottenerlo si riporta sull'asse orizzontale, o delle *ascisse*, un valore (a piacere) assegnato alla x (per esempio $x = 1$); sull'asse verticale, o delle *ordinate*, si riporta il valore corrispondente ottenuto per la y (che è, come il

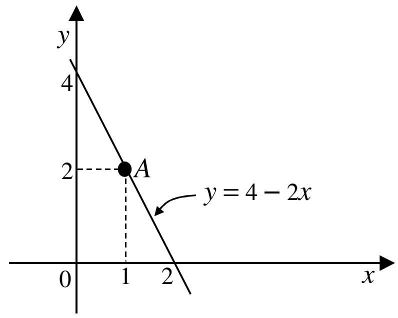

Figure 1: Il grafico della retta

lettore può controllare, $y = 2$); l'intersezione delle perpendicolari innalzate da ciascuno di questi valori è un punto del grafico della funzione (si tratta del punto A della figura). Ripetendo questo procedimento, possiamo ricavare tutti i punti che desideriamo del grafico della funzione.[1]
Poiché nel caso specifico siamo in presenza di una retta, sappiamo dalla geometria elementare che è sufficiente disporre di due punti per ottenere l'intero grafico. Naturalmente, le cose non sono sempre così semplici, ma il procedimento descritto è del tutto generale. Il lettore provi per esercizio a ricavare il grafico della funzione $y = x^2$.

Il grafico fornisce un'immagine visiva, e perciò di grande efficacia, della funzione, ovvero della relazione tra le due variabili. Nell'esempio appena fatto ci dice che, man mano che la variabile x assume valori sempre più grandi, la variabile y assume valori sempre più piccoli, e che la diminuzione della y avviene con regolarità. Ci permette pure di calcolare, anche senza conoscere l'esatta forma algebrica della funzione, quale valore di y corrisponde a ogni

[1] In generale, il grafico di una funzione può essere definito anche per valori negativi della variabile indipendente (della x) e può assumere valori negativi della variabile dipendente (della y). Questo è il caso della retta della FIGURA 1, che è stata tracciata anche per valori negativi della x e che assume valori negativi della y quando x diventa maggiore di 2. Tuttavia, molto spesso le variabili economiche non possono avere valori negativi: per esempio, una quantità prodotta negativa, o un prezzo negativo non hanno alcun significato (ma un profitto negativo lo ha: è una perdita). Perciò molto spesso disegneremo soltanto una parte del grafico, il cosiddetto "primo quadrante", in cui le variabili hanno valori positivi o nulli. C'è un'altra avvertenza da fare: le unità di misura sui due assi di un grafico possono essere *diverse* (anche se nella FIG. 1 non lo sono): 1 sull'asse delle ascisse può essere un segmento più lungo (o più corto) di 1 sull'asse delle ordinate. Questo modo di procedere è del tutto legittimo quando le grandezze misurate sui due assi non sono *omogenee*, cosa che in economia avviene molto spesso. Per esempio, possiamo avere la quantità di un bene sull'asse delle ascisse e il suo prezzo su quello delle ordinate; oppure quantità di due beni *diversi* sui due assi.

valore assegnato alla x. A questo scopo, è sufficiente partire dal valore della x, cioè da un punto sull'asse delle ascisse: si traccia la perpendicolare a quel punto fino a incontrare la curva della funzione e, arrivati qui, si traccia la parallela all'asse delle ascisse fino a incontrare l'asse delle ordinate, identificando così il valore di y che andavamo cercando.

1.2 Le equazioni

Molto spesso le relazioni tra le variabili che compaiono all'interno di un modello sono descritte da equazioni. Un'*equazione* afferma semplicemente che due espressioni matematiche sono uguali. Eccone degli esempi: (*i*) $-5 = 4 - 2x$; (*ii*) $x^2 = 25$; (*iii*) $2x + y = 4$; (*iv*) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Ne discende che un'equazione può definire una funzione (ma una funzione può anche essere definita in altri modi: uno di essi è una tabella dei valori della x e della y). Di fatto, l'esempio (*iii*) è una riscrittura della funzione della FIGURA 1. In questo caso ci sono infinite coppie di valori di x e y che soddisfano l'equazione, che cioè verificano l'uguaglianza. Il lettore provi a identificarne alcune, sempre per l'esempio (*iii*). Gli esempi (*i*) e (*ii*) sono stati invece ottenuti imponendo alla funzione, ossia alla y, particolari valori. In questi casi solo certi valori della x soddisfano le equazioni. Se disponiamo dei grafici, possiamo ricavarli partendo dal valore delle y e rintracciando i valori della x che vi corrispondono. Infine, l'equazione (*iv*) costituisce un esempio di *identità*, che è un'eguaglianza che risulta soddisfatta per *ogni* coppia di valori che assegniamo alla x e alla y.

Un modello economico si compone in genere di più equazioni e prende in considerazione quindi più variabili. Quelle il cui valore viene determinato all'interno del modello vengono dette *variabili endogene*. Vi sono invece altre variabili che nel modello hanno un valore prefissato, imposto dall'esterno. Esse vengono chiamate *variabili esogene*. Per esempio, la quantità domandata di un bene può dipendere dal suo prezzo e dal reddito dei consumatori (in formula si avrebbe $q = D(p, R)$). Se decidiamo di analizzare solo la relazione tra quantità e prezzo, il reddito R va assunto come un dato esterno al modello: è appunto una variabile esogena.

Abbiamo visto inoltre che nelle equazioni compaiono termini che hanno un preciso valore numerico, che non varia. Questi termini sono detti *costanti*. Quando le costanti sono moltiplicate per una variabile vengono chiamate *coefficienti*. Nell'esempio $y = 4 - 2x$, il numero 4 è una costante e il numero 2 è un coefficiente. Generalizzando un poco, possiamo indicare le costanti e i coefficienti attraverso simboli, come a, b ecc. In questo caso si parla di costanti parametriche, o, più in breve, di *parametri*. Si noti però che, mentre la costante ha sempre un valore numerico prefissato, i parametri, pur essendo dei dati, possono variare (in questo finiscono col somigliare molto alle variabili esogene).

2 La retta

Un tipo di funzione che si incontra molto di frequente nei modelli economici è la *funzione lineare*, che può essere sempre ridotta alla seguente equazione:

$$y = a + bx$$

dove, come già sappiamo, y e x sono rispettivamente la variabile dipendente e la variabile indipendente, mentre a e b sono i *parametri* della funzione. Siccome questa funzione ha sempre come rappresentazione grafica una linea retta, l'equazione appena scritta viene chiamata *equazione della retta*, o anche *equazione lineare*. È possibile che l'equazione della retta sia scritta in forma diversa. Su questo punto torneremo più avanti. Comunque un esempio è quello del caso (*iii*) del PAR. 1.2

Il parametro a viene detto *intercetta* oppure *termine noto*, e misura (come è immediato verificare) l'ordinata del punto in cui $x = 0$, ossia l'ordinata del punto in cui il grafico della funzione incontra l'asse verticale. Più grande è il parametro a, più in alto si trova questo punto. Se il parametro a è uguale a zero, la funzione passa per l'origine degli assi, e la sua formula diventa $y = bx$.

Il parametro b viene detto *coefficiente angolare* oppure *inclinazione*, o anche *pendenza*. Esso può essere (come del resto il parametro a) positivo, negativo o nullo. Se è positivo la retta è crescente (si dice che tra y e x c'è una relazione *diretta*, o appunto *positiva*); se è negativo la retta è decrescente (si dice che tra y e x c'è una relazione *inversa*, o appunto *negativa*); se infine $b = 0$ allora il grafico risultante è una retta orizzontale: quale che sia il valore assunto dalla x, la y ha sempre lo stesso valore (e precisamente $y = a$); in questo caso y è *indipendente* da x.

Per disegnare il grafico di una retta si segue il procedimento generale descritto prima: basta scegliere due valori di x, calcolare con la formula $y = a + bx$ i due corrispondenti valori di y, riportare le coppie di valori di x e y sul grafico, identificando due punti, e tracciare la retta che passa per quei due punti. La scelta dei due valori di x da cui partire è del tutto arbitraria, ma di solito è molto comodo scegliere per uno dei due il valore $x = 0$, da cui si ricava subito $y = a$.

Il lettore si eserciti a disegnare i grafici di diverse rette partendo da valori a piacere di a e b. In particolare provi a disegnare su un grafico delle rette che hanno lo stesso valore di b e che differiscono solo per il valore di a.

Verificherà agevolmente che queste rette sono tutte *parallele* (hanno cioè la stessa inclinazione). Faccia poi l'esercizio di disegnare su un grafico delle rette che differiscono solo per il valore di b (che hanno cioè la stessa intercetta). Verificherà che, se i valori di b che ha scelto sono maggiori di zero, queste rette sono crescenti e tanto più ripide quanto più alto è il valore di b; se invece i valori di b che ha scelto sono negativi, otterrà delle rette decrescenti e tanto più ripide quanto più grande è il *valore assoluto* di b, ossia il valore numerico di b che si ha trascurando il segno meno. Questo esercizio conferma appunto che il parametro b è una misura dell'inclinazione della retta.

2.1 Ancora sul significato del parametro b

Vedremo ora che il parametro b ha anche un altro significato. Possiamo ragionare così. Partiamo da un esempio particolare di retta scelta a piacere, e precisamente da:

$$y = 5 + 3x$$

Calcoliamo il valore di y che corrisponde a $x = 4$; sostituendo tale valore nella formula si ottiene $y = 5 + 3 \times 4 = 17$. Aumentiamo ora di una unità il valore di x (prendiamo cioè $x = 5$) e calcoliamo il nuovo valore di y; si ottiene $y = 5+3\times5 = 20$. Se facciamo la differenza tra i due valori di y così ottenuti ricaviamo $20-17 = 3$. In altri termini, quando x aumenta di una unità, si ha che, data la formula della funzione, y aumenta di tre unità. Se ripetiamo lo stesso calcolo per due valori successivi di x qualsiasi, ad esempio per $x = 30$ e $x = 31$, otteniamo ancora una differenza tra i due corrispondenti valori di y che è pari a 3; in altri termini, ogni volta che x aumenta (o diminuisce) di una unità, si ottiene che y aumenta (o diminuisce) di 3 unità. Non è un caso che si trovi sempre il valore 3. Questo dipende dal fatto che nel nostro esempio abbiamo scelto $b = 3$. Se avessimo scelto $b = 7$ (l'equazione sarebbe stata $y = 5 + 7x$), avremmo trovato sempre il valore 7; se avessimo scelto $b = -2$ avremmo trovato sempre il valore -2; in quest'ultimo caso, a fronte di un *aumento* unitario di x, avremmo ottenuto una *diminuzione* di y di due unità (il lettore verifichi questi risultati per esercizio). In conclusione, il parametro b (il *coefficiente angolare* della retta) misura di quanto varia (in aumento o diminuzione) il valore di y quando x varia di una unità, e ciò quale che sia il valore di x da cui si decide di partire.

È utile disporre di una notazione sintetica per quanto riguarda le variazioni delle variabili x e y. Scriveremo perciò Δx per indicare la variazione della variabile x, ossia la differenza tra il suo valore di arrivo e il suo valore di partenza (l'espressione Δx si legge «delta x»); e scriveremo Δy per indicare la corrispondente variazione della variabile y (l'espressione Δy si legge

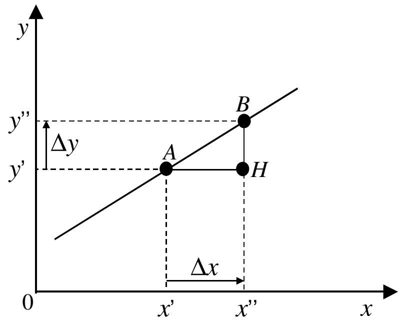

Figure 2: Il calcolo del coefficiente angolare

«delta y»). Utilizzando questa notazione per sintetizzare quanto detto nel capoverso precedente, possiamo dire che, quando $\Delta x = 1$, allora $\Delta y = b$. Se consideriamo una variazione di x diversa da uno (più grande o più piccola) allora anche la variazione di y sarà diversa da b. Riprendendo la retta dell'esempio, se partiamo ancora da $x = 4$ (e perciò da $y = 17$) e consideriamo come secondo valore $x = 6$ (ossia $\Delta x = 2$), otteniamo $y = 23$ e $\Delta y = 6$. Tuttavia, se facciamo il rapporto (la divisione) tra Δy e Δx, otteniamo ancora $6 \div 2 = 3 = b$. Questo risultato è vero per qualsiasi livello di partenza di x e per qualsiasi variazione di x (per qualsiasi valore di Δx); ossia è sempre vero che $b = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si provi, per esempio, a partire da $x = 10$ considerando $\Delta x = 0.5$; si otterrà ancora $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$. Il rapporto tra la variazione di y e la variazione di x viene chiamato anche *rapporto incrementale* (è il rapporto tra le due variazioni, o "incrementi").

Se si dispone del grafico di una retta e non se ne conoscono i parametri, e se si vuole calcolare il parametro b (il coefficiente angolare), si può usare il seguente metodo, detto "metodo del triangolo". Si scelgono due valori di x a piacere (per esempio x' e x''); si avrà ovviamente $\Delta x = x'' - x'$. I due corrispondenti valori di y sono rispettivamente y' e y'' (con $\Delta y = y'' - y'$). Guardando il grafico della FIGURA 2 si vede che Δx è uguale alla lunghezza del segmento AH, mentre Δy è uguale alla lunghezza del segmento BH; pertanto il coefficiente angolare b è uguale al rapporto tra il cateto verticale e il cateto orizzontale del triangolo rettangolo ABH ed è tanto più grande quanto maggiore è l'angolo $B\hat{A}H$ (chi sa un po' di trigonometria verificherà facilmente che il coefficiente angolare è pari alla "tangente trigonometrica" di quell'angolo). Se la retta è decrescente, b può essere sempre ottenuto come rapporto tra i due cateti, con l'avvertenza che questa volta esso va preceduto dal segno meno (la retta è decrescente e perciò ha inclinazione *negativa*), come del resto è logico, perché questa volta y'' è minore di y', sicché Δy

risulta essere negativo. Questo metodo permette di calcolare il coefficiente angolare di qualsiasi retta.

2.2 Un'altra forma della equazione della retta

Nel testo non incontreremo soltanto rette scritte nella forma $y = a + bx$. Spesso le incontreremo scritte in un'altra forma (detta forma implicita), ossia scritte nel modo seguente:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = k$$

dove x_1 e x_2 sono le due variabili, mentre a_1, a_2 e k sono i tre parametri dell'equazione.[2] Ora è sempre possibile trasformare un'equazione della retta scritta in forma implicita in un'equazione scritta nella forma consueta. Supponendo che x_2 sia la variabile dipendente e x_1 sia la variabile indipendente, è possibile risolvere l'equazione scritta sopra per l'incognita x_2: si tratta prima di tutto di sottrarre a_1x_1 dai due lati dell'eguaglianza (ciò equivale a portare a_1x_1 al secondo membro cambiandone il segno); fatto ciò, si divide primo e secondo membro per a_2; si ottiene così:

$$x_2 = \frac{k}{a_2} - \frac{a_1}{a_2}x_1$$

che è l'equazione della retta scritta nella forma consueta, dove x_2 sta al posto di y (è la variabile dipendente), $\frac{k}{a_2}$ sta al posto di a (è l'intercetta della retta), $-\frac{a_1}{a_2}$ sta al posto di b (è l'inclinazione della retta) e infine x_1 sta al posto di x (è la variabile indipendente).

Tuttavia, per costruire il grafico di una retta scritta in forma implicita non è necessario scrivere prima la forma esplicita. È possibile, e più semplice, procedere direttamente dalla forma implicita. Assumendo di misurare x_2 sull'asse delle ordinate e x_1 su quello delle ascisse, basta calcolare le due intercette, quella con l'asse delle ordinate e quella con l'asse delle ascisse, e poi tracciare la retta che passa per questi due punti.

[2] Si faccia attenzione alla terminologia: in questo paragrafo x_1 e x_2 rappresentano due diverse variabili, ciascuna delle quali può assumere diversi valori specifici. In altre occasioni, invece, x_1 e x_2 possono rappresentare due specifici valori della medesima variabile x. In altre parole, un indice deponente può, di volta in volta, indicare o un valore specifico di una certa variabile distinto da un altro valore della stessa variabile, oppure, come avviene in questo paragrafo, due variabili *diverse* che appartengono alla *stessa famiglia* di variabili (per esempio due beni diversi o due prezzi). Questo discorso vale anche per le costanti: nell'esempio considerato, a_1 e a_2 sono due diverse costanti (sono i due coefficienti delle due variabili). In altre occasioni, invece, a_1 e a_2 potranno rappresentare due diversi valori dello stesso parametro.

Il calcolo delle due intercette è molto semplice: per la prima si pone nella equazione scritta in forma implicita $x_1 = 0$ e si ottiene subito $x_2 = \frac{k}{a_2}$ (che dà il valore di x_2 quando appunto x_1 è nullo); per la seconda si pone $x_2 = 0$ e si ottiene dopo un semplicissimo calcolo $x_1 = \frac{k}{a_1}$ (che dà il valore di x_1 quando il valore di x_2 è nullo). Se k, a_1 e a_2 sono tutti positivi si ottiene il grafico di una retta decrescente.

Il calcolo del coefficiente angolare (dell'inclinazione della retta) può essere ottenuto col metodo del triangolo. Si può scegliere il triangolo costituito dalle due intercette e dall'origine. Facendo il rapporto tra i due cateti si ottiene:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{k}{a_2} / \frac{k}{a_1} = -\frac{a_1}{a_2}$$

Questa formula dice che il coefficiente angolare della retta scritta in forma implicita è uguale al rapporto cambiato di segno tra il parametro che moltiplica la variabile misurata sull'asse delle ascisse (a_1) e il parametro che moltiplica la variabile misurata sull'asse delle ordinate (a_2). Il lettore può controllare che questo è appunto lo stesso valore del coefficiente angolare che avevamo ottenuto quando avevamo trasformato l'equazione della retta dalla forma implicita a quella esplicita.

3 Le funzioni non lineari

Le relazioni tra variabili che troviamo nei modelli economici non sono sempre lineari, non hanno sempre la forma grafica di una retta. Spesso queste relazioni hanno la forma di una *curva*. Vediamo due semplici esempi di funzioni non lineari.

La parabola. Uno è costituito dalla cosiddetta *funzione quadratica*, che nella sua forma più generale ha la seguente espressione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Questa funzione si caratterizza per il fatto di contenere la variabile indipendente, la x, elevata al quadrato. Graficamente essa ha la forma di una *parabola*, sicché l'equazione scritta prima viene chiamata anche equazione della parabola. Il coefficiente a non può essere nullo (se così fosse torneremmo al caso della retta). Se a è negativo, la curva prima sale e poi discende (cfr. FIGURA 3a). Il punto della parabola che ha l'ordinata più elevata viene chiamato punto di massimo (nel grafico è stato etichettato come MAX). Viceversa, se il coefficiente a è positivo, la curva prima scende e poi sale

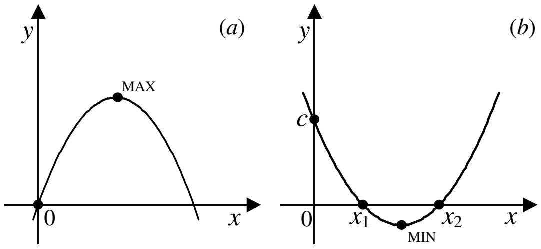

Figure 3: Due possibili andamenti grafici della parabola

(cfr. FIGURA 3b). Il punto della curva che ha l'ordinata più piccola viene chiamato punto di minimo (nel grafico è stato etichettato come MIN). I coefficienti b e c possono invece essere anche uguali a zero. Analogamente a quanto avviene nel caso della retta, un coefficiente, precisamente c, misura l'intercetta sull'asse delle ordinate (il lettore spieghi perché). Se c è uguale a zero, la parabola passa per l'origine degli assi (è il caso del grafico a).
Si noti infine che, se poniamo $y = 0$, otteniamo la forma generale di un'equazione di secondo grado. Siccome y è uguale a zero lungo l'asse delle ascisse, le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono individuate sul grafico dai punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse (essi sono stati indicati con x_1 e x_2 nel grafico b). Per quei valori della x, infatti, l'equazione di secondo grado risulta soddisfatta.

L'iperbole equilatera. Facciamo un altro esempio di funzione non lineare. Si consideri la seguente equazione:

$$x\,y = k$$

dove k è una costante positiva. La rappresentazione grafica di questa funzione è un'*iperbole equilatera*, ossia una curva che discende continuamente da sinistra verso destra (cfr. FIGURA 4). L'equazione dell'iperbole afferma semplicemente che il prodotto delle due variabili, x e y, è sempre costante. Per questo motivo la curva non tocca mai nessuno dei due assi. Per quanto piccolo diventi il valore assunto da una delle due variabili, esso non può mai annullarsi giacché il loro prodotto deve essere sempre positivo. I due assi delle ascisse e delle ordinate sono gli *asintoti* della funzione, le due rette cui la funzione si avvicina continuamente senza mai toccarle.[3]

[3] A rigore, quello rappresentato nella FIGURA 4 è solo una parte del grafico della funzione, precisamente quello che si ottiene quando si assume che x e y siano entrambi *positivi*. Spesso, quando x e y rappresentano delle variabili economiche, le cose stanno effettiva-

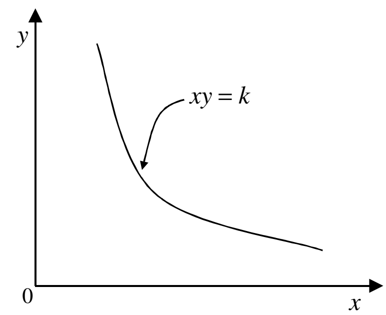

Figure 4: Il grafico dell'iperbole equilatera

3.1 L'inclinazione di una curva

Abbiamo visto prima come calcolare il coefficiente angolare di una retta. Ci occuperemo ora di come calcolare l'inclinazione di una curva. La caratteristica di una curva che più ci interessa in questa sede è il fatto che la sua inclinazione *varia* in ogni suo punto (al contrario delle rette che hanno sempre la stessa inclinazione, pari appunto al valore del parametro b). Abbiamo anche visto che nella retta l'inclinazione ha un importante significato: misura di quanto varia il valore di y (o di x_2 se ci riferiamo al caso della retta scritta in forma implicita) quando x (rispettivamente x_1) varia di una unità; oppure, il che è lo stesso, misura il rapporto tra Δy e Δx (rispettivamente il rapporto $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$) quando Δx (rispettivamente Δx_1) è diverso da uno. Perciò è il caso di vedere se è possibile generalizzare questi significati alle funzioni i cui grafici sono rappresentati da curve, superando la difficoltà connessa al fatto che l'inclinazione non è più costante in ogni punto della funzione.

Cominciamo innanzitutto col definire l'*inclinazione* di una curva in un particolare punto. Essa viene misurata dall'inclinazione della retta *tangente* alla curva in quel punto. Per esempio, se si vuole calcolare l'inclinazione della $f(x)$ della FIGURA 5 nel punto A, si traccia prima di tutto la retta t, che è la retta tangente alla $f(x)$ nel punto in questione, e poi si calcola il coefficiente angolare di quella retta (per esempio, col metodo del triangolo). Confrontando (anche solo mentalmente) i coefficienti angolari delle tangenti ai vari punti di una curva, si ottiene una stima dell'andamento dell'inclinazione

mente così. In generale, tuttavia, le variabili possono essere anche negative e, come sappiamo dall'algebra elementare, il prodotto di due numeri negativi è positivo («meno per meno fa più»). Perciò il valore positivo k può essere ottenuto anche come prodotto tra una x negativa e una y negativa. Come è fatto il grafico della funzione $xy = k$ quando appunto k è positivo ma x e y sono entrambi negativi? Lasciamo al lettore il compito di trovare la risposta costruendo il grafico.

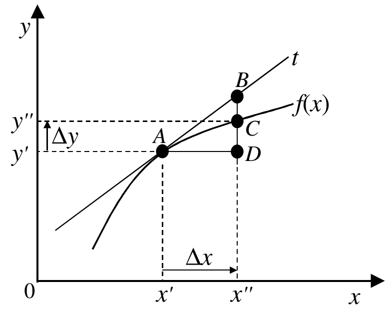

Figure 5: L'inclinazione di una curva

della curva nei vari punti.

Supponiamo che il coefficiente angolare della retta t della FIGURA 5 sia pari a 3. Sappiamo che questo significa che, se si accresce di una unità il valore di x (rispetto al valore di partenza x'), il valore di y, *lungo la retta* t, aumenta di 3. Ma a noi interessa sapere di quanto aumenta la y *lungo la curva*; ed è facile rendersi conto che l'aumento è un po' meno di 3 (sarebbe un po' più di 3 se la curva, invece di essere concava, fosse convessa). Tuttavia, se l'unità di misura della variabile x è molto piccola, se cioè i due valori di x, facendo la differenza tra i quali si calcola Δx, quasi si confondono, allora dire che in questo caso Δy lungo la curva è pari a 3 diventa un'approssimazione assolutamente soddisfacente (così è, per esempio, quando un quadretto sul grafico rappresenta 100 unità, o 1000 unità).
In questi casi – e nei grafici che faremo supporremo che le unità di misura delle variabili siano sempre piccole – si può pertanto dire che il coefficiente angolare della retta t tangente alla curva nel punto considerato misuri quale è il valore di Δy quando $\Delta x = 1$, ossia misuri di quanto aumenta la y a fronte di un aumento unitario della x; oppure, il che è lo stesso, misuri il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (il rapporto incrementale). Naturalmente, siccome l'inclinazione della curva cambia in ogni suo punto, il rapporto incrementale assume valori diversi in ogni punto della curva. In particolare: in tutti i punti in cui la curva è crescente, il rapporto incrementale è positivo (e viceversa nei punti in cui la curva è decrescente); se, scegliendo a piacere due punti A e B lungo la curva, nel punto A la curva è più "ripida" che nel punto B, il *valore assoluto* del rapporto incrementale in A sarà maggiore che in B; accade naturalmente il contrario se in A la curva è meno ripida che in B; ed è chiaro che il rapporto incrementale sarà lo stesso se nei due punti la curva avrà la stessa pendenza; infine, se la curva ha un punto di massimo o di minimo, in quel punto il rapporto incrementale è nullo (la retta tangente è, in entrambi i casi,

orizzontale).

Il calcolo dell'inclinazione di una curva ci consente di definire con precisione, quanto meno graficamente, la convessità o la concavità di una funzione. Diremo cioè che una funzione è *convessa* (rispettivamente, *concava*) quando, in qualsiasi punto si sia tracciata la retta tangente, il grafico della funzione giace interamente al di sopra (rispettivamente, al di sotto) della tangente stessa. Per esempio, usando questo metodo, si verifica immediatamente che la curva della FIGURA 5 è concava.

4 Come si calcolano le variazioni

Nelle pagine precedenti abbiamo considerato molto spesso delle *variazioni* (incrementi) di una variabile, e le abbiamo indicate con Δx, quando volevamo riferirci a una generica variabile indipendente, con Δy, quando volevamo riferirci a una generica variabile dipendente (a una generica funzione), con Δq, Δp ecc., quando volevamo riferirci a variabili o a funzioni specifiche, come quantità, prezzi ecc. Esse ci sono servite, tra l'altro, per definire il rapporto incrementale. In altre parole, abbiamo visto moltissime espressioni in cui compare l'operatore Δ, che significa appunto "variazione". Diventa importante, allora, essere capaci di calcolare le variazioni delle funzioni, naturalmente quando conosciamo le formule di queste ultime. Qui di seguito cercheremo di impratichirci con alcune regole semplici che ci serviranno in molte occasioni nelle prossime pagine.

4.1 Alcune utili regole

La funzione lineare. Cominciamo, come al solito, col caso più facile, ossia con la *retta*. Sappiamo che la formula di questa funzione è $y = a + b\,x$. Come si calcola Δy? Ricordiamo la definizione di Δy: essa è

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

dove y_0 è il livello iniziale della variabile e y_1 è invece il livello finale della variabile, quello che si ha appunto dopo la variazione.[4] Applicando la definizione di funzione abbiamo perciò $y_0 = a + b\,x_0$ e $y_1 = a + b\,x_1$. Possiamo allora fare la sottrazione dei secondi membri in modo da ottenere appunto, con un

[4]Questo è appunto un caso in cui gli indici deponenti 0 e 1 identificano due *valori diversi* della *stessa variabile* e non due variabili diverse.

calcolo elementare, l'espressione che cerchiamo per Δy:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y_1 - y_0 = \\
&= (a + b\,x_1) - (a + b\,x_0) = \\
&= b\,(x_1 - x_0) = b\Delta x
\end{aligned}$$

Nel caso della retta, cioè, la variazione della y è data dal prodotto del coefficiente angolare della retta moltiplicato per Δx. Si noti che il valore del parametro a non compare nel risultato; conta solo il coefficiente angolare. Possiamo scrivere questo nostro primo risultato nel modo seguente:

$$\Delta\,(a + b\,x) = b\Delta x \tag{1}$$

Da esso possiamo ricavare facilmente altre due regole per calcolare le variazioni.

La variazione di una costante. Per ottenere la prima poniamo $b = 0$ al primo e al secondo membro. Otteniamo:

$$\Delta a = 0 \tag{2}$$

Questa regola dice una cosa piuttosto ovvia: la *variazione di una costante* è nulla.

La variazione di una costante moltiplicativa. Per ottenere la seconda regola poniamo nella (1) $a = 0$. Otteniamo

$$\Delta\,(b\,x) = b\Delta x \tag{3}$$

Questa regola dice che la *variazione del prodotto di una costante per una variabile* è uguale al prodotto della costante per la variazione della variabile.

La variazione di una somma. Vediamo ora qual è la regola per calcolare la variazione della somma di due variabili. Cerchiamo cioè la formula per calcolare $\Delta\,(x + y)$. Non è difficile trovarla: basta ricordare la definizione di variazione. Nel nostro caso abbiamo

$$\Delta\,(x + y) = (x_1 + y_1) - (x_0 + y_0)$$

Raccogliamo i termini in modo diverso:

$$\Delta\,(x + y) = (x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)$$

La prima parentesi al secondo membro è Δx e la seconda è Δy. Questo ci dà la terza regola:

$$\Delta (x + y) = \Delta x + \Delta y \tag{4}$$

Essa afferma che la *variazione della somma* di due variabili è uguale alla somma delle variazioni di quelle variabili. Questa regola vale, come è agevole verificare, anche quando le variabili sono più di due.

La variazione di un prodotto. Un'altra regola importante riguarda il calcolo della *variazione di un prodotto* di due variabili. La formula per calcolare $\Delta (x\,y)$ è la seguente:

$$\Delta (x\,y) = x\Delta y + y\Delta x \tag{5}$$

Si tratta di una regola che dà un risultato approssimato, ma tanto più preciso quanto più piccola è la dimensione delle variazioni. Per la sua dimostrazione si può ragionare così.[5] Si parte scrivendo $\Delta (x\,y) = x_1y_1 - x_0y_0$. Poi si cambia un po' la terminologia ponendo $x_0 = x$ e $x_1 = x + \Delta x$ (e facendo lo stesso per y). La nostra formula diventa allora $\Delta (x\,y) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy$. Svolgendo i prodotti al secondo membro abbiamo: $\Delta (x\,y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. I primi due addendi sono quelli della formula (5). Il terzo è un prodotto di due variazioni, ed è perciò un numero piccolo, tanto più piccolo quanto più piccole sono le due variazioni. Possiamo perciò trascurarlo e scrivere $\Delta (x\,y) \approx x\Delta y + y\Delta x$, dove il segno di uguale "arrotondato" ci ricorda appunto che si tratta di una eguaglianza non esatta ma approssimata. L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è Δx (e, di conseguenza, quanto più piccolo è anche Δy). Noi ne faremo uso, di solito, come se fosse un'eguaglianza esatta.

Della formula (5) si può anche avere un'intuizione grafica facendo ricorso al procedimento descritto nella FIGURA 6. Il prodotto $x\,y$ può essere visualizzato come l'area di un rettangolo la cui base è un segmento di lunghezza x_0 e la cui altezza è un segmento di lunghezza y_0. Se ora aumentiamo la base di Δx e l'altezza di Δy, otteniamo un rettangolo più grande. La variazione del prodotto tra le due variabili (appunto $\Delta (x\,y)$) sarà data dalla differenza tra le due aree. Si vede subito che tale differenza è data dalla somma delle aree di tre rettangoli: quello indicato con A ha per base x_0 e per altezza Δy; quello indicato con B ha per base Δx e per altezza y_0; infine quello indicato con C ha per base Δx e per altezza Δy. Quest'ultimo rettangolo è più piccolo

[5] Seguire i passi della dimostrazione è molto utile (ci si abitua a ragionare con le formule). Il lettore che ha fretta può saltarla e fidarsi del risultato, ma è molto meglio *non* fidarsi (si impara molto di più seguendo i ragionamenti della dimostrazione)

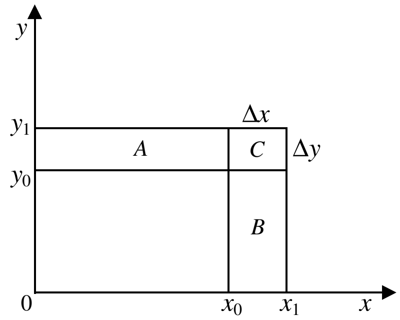

Figure 6: Il calcolo della variazione del prodotto

degli altri, e lo è tanto di più quanto più piccole sono le variazioni Δx e Δy. Se lo trascuriamo e sommiamo le aree degli altri due rettangoli, otteniamo $x\Delta y + y\Delta x$ cioè esattamente la regola (5).

La variazione di un quadrato. La regola (5) consente di trovarne altre. Supponiamo, per esempio, di avere la funzione $y = x^2$, e di volerne calcolare la variazione, ossia Δy. Possiamo riscrivere la funzione come $y = x \cdot x$ e applicare la regola della variazione del prodotto (5). Al secondo membro otteniamo

$$\Delta (x \cdot x) = x\Delta x + x\Delta x = 2x\Delta x$$

Ne deriva perciò la seguente regola per la *variazione del quadrato*:

$$\Delta \left(x^2\right) = 2x\Delta x \tag{6}$$

E si può andare avanti.

La variazione di una potenza. Per esempio, è facile controllare che[6]

$$\Delta \left(x^3\right) = 3x^2\Delta x$$

e, più in generale, che vale la seguente regola per il calcolo della *variazione di una potenza* qualsiasi:

$$\Delta (x^a) = a\, x^{a-1}\Delta x \tag{7}$$

dove a è un numero qualsiasi, purché costante.

[6] Basta scrivere $\Delta(x^3) = \Delta(x^2 x)$ e applicare la regola (5). Si ottiene $\Delta(x^2 x) = x \cdot 2x\Delta x + x^2\Delta x = 2x^2\Delta x + x^2\Delta x = 3x^2\Delta x$.

Altri esempi di variazioni. Le regole (2–7) consentono di calcolare le variazioni per un gran numero di funzioni. Facciamo qualche esempio:

- Supponiamo di voler calcolare la variazione di una parabola, ossia della funzione $y = ax^2+bx+c$. È sufficiente applicare le regole (2) (variazione di una costante additiva), (3) (variazione di una costante moltiplicativa), [(4) (variazione di una somma) e (6) (variazione di un quadrato), e si ottiene subito il risultato

$$\Delta\left(ax^2 + bx + c\right) = 2ax\Delta x + b\Delta x$$

- Supponiamo di voler calcolare la variazione della funzione $y = \frac{k}{x}$, ossia di un'iperbole. Si deve prima di tutto riscrivere la funzione nel seguente modo:[7] $y = k\,x^{-1}$. Poi si applicano la regola (7), ponendo $a = -1$, e la solita regola (3). Si ottiene

$$\Delta\frac{k}{x} = \Delta k\,x^{-1} = -k\,x^{-2}\Delta x = -\frac{k}{x^2}\Delta x$$

- Supponiamo di voler calcolare la variazione di una radice, ossia della funzione $y = \sqrt{x}$. Si deve prima di tutto riscrivere la funzione nel seguente modo:[8] $y = x^{1/2}$. Poi si applica la regola (7), ponendo $a = \frac{1}{2}$, e si ottiene

$$\Delta\sqrt{x} = \Delta x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

4.2 Il calcolo del rapporto incrementale

Sappiamo calcolare la variazione di y in funzione della variazione di x; sappiamo cioè ottenere una espressione in cui Δy (al primo membro) è uguale a un'espressione che moltiplica Δx (al secondo membro). Per esempio, siamo in grado di verificare che, se si ha $y = f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$, si ha anche $\Delta y = \left(2ax - \frac{b}{x^2}\right)\Delta x$.[9] A questo punto il calcolo del rapporto incrementale diventa facilissimo: basta dividere primo e secondo membro per Δx.

[7] Si applica la proprietà delle potenze per cui un numero elevato a un esponente negativo è uguale al reciproco di quel numero elevato allo stesso esponente, ma positivo. In formule: $x^{-a} = 1/x^a$.

[8] Si applica la proprietà delle potenze per cui un numero elevato a un esponente frazionario è uguale a una radice il cui grado è misurato dal denominatore della frazione e in cui l'esponente del numero sotto radice è misurato dal denominatore della frazione. In formule: $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$.

[9] Il lettore è vivamente pregato di effettuare il calcolo per verificare l'esattezza del risultato.

Nel caso specifico si otterrà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

Più in generale, ogni volta che siamo in grado di ottenere una espressione per la variazione di una funzione $y = f(x)$ ossia una espressione per $\Delta f(x)$, possiamo immediatamente ottenere la formula del rapporto incrementale: è sufficiente dividere quella espressione per Δx.

5 Variazione percentuale ed elasticità

Abbiamo visto che il rapporto incrementale di una funzione ci dice di quanto varia la y al variare della x a partire da un determinato punto: è una misura della *variazione* della y quando la x aumenta (o diminuisce) di una unità. Ma il rapporto incrementale soffre di un inconveniente: il suo valore dipende dalle unità di misura adottate.

Un esempio ci aiuterà a chiarire questo punto. Supponiamo di voler prendere in esame la funzione che lega la quantità di salsiccie domandata da un individuo al loro prezzo (la cosiddetta curva di domanda individuale). Supponiamo che questa curva ci dica che quando il prezzo aumenta di una unità la quantità domandata diminuisce di due unità. Dobbiamo evidentemente specificare quali unità di misura adottiamo per il prezzo e la quantità; altrimenti l'affermazione fatta prima è priva di significato. Stabiliamo, per esempio, che il prezzo venga misurato in euro e la quantità in etti. La curva di domanda ci dice dunque che, quando il prezzo aumenta di un euro per etto (di una unità), la quantità domandata diminuisce di due etti (di due unità). In altri termini, visto che la quantità è la variabile dipendente e il prezzo è la variabile indipendente, il rapporto incrementale è pari a (meno) due. Cosa accade però se la quantità viene misurata in chili invece che in etti? In questo caso un aumento unitario del prezzo (un euro) conduce a una diminuzione di 0,2 kg della quantità, e il rapporto incrementale scende a 0,2! Il rapporto incrementale richiede perciò che ogni volta si specifichino le unità di misura.

5.1 La variazione percentuale

Se vogliamo evitare questo riferimento nel misurare le variazioni, dobbiamo modificare il rapporto incrementale così da renderlo indipendente dalle unità di misura. L'idea è di far ricorso alle *variazioni percentuali.* Supponiamo che inizialmente il prezzo delle salsiccie sia di 2 euro per etto (o di 20 euro per chilo). Dire che il prezzo aumenta di un euro per etto (o di 10 euro per chilo) equivale in termini percentuali ad affermare che il prezzo è aumentato del 50%. Infatti, chiamando p il prezzo, possiamo calcolare il rapporto $\frac{\Delta p}{p}$, ovvero la variazione divisa per il livello di partenza della variabile. Questo rapporto (moltiplicato per 100) viene chiamato *variazione percentuale* oppure *tasso di variazione* e lo indicheremo col simbolo della variabile sormontato da una tilde ($\tilde{p}$). Nel nostro esempio abbiamo

$$\tilde{p} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{10}{20} = 0,5 = 50\%$$

La quantità inizialmente domandata sia 5 etti (ovvero 0,5 kg). Se misuriamo la quantità in etti, la sua variazione percentuale ($\tilde{q}$), trascurando il segno meno, sarà:

$$\tilde{q} = \frac{\Delta q}{q} = \frac{2}{5} = 0,40 = 40\%$$

Quando misuriamo la quantità in chili, invece che in etti, otteniamo lo stesso risultato:

$$\tilde{q} = \frac{\Delta q}{q} = \frac{0,2}{0,5} = 0,40 = 40\%$$

Dunque, misurando le variazioni in termini percentuali, possiamo fare a meno di specificare le unità di misura. L'operazione che abbiamo compiuto è stata semplicemente quella di misurare ciascuna variazione nei termini del livello assunto inizialmente dalla variabile considerata, ovvero di assumere come unità di misura di ciascuna variabile il suo livello di partenza.

5.2 Due proprietà dei tassi di variazione

Abbiamo appena visto la definizione del tasso di variazione (o variazione percentuale): per una qualsiasi variabile x essa è $\tilde{x} = \frac{\Delta x}{x}$. Nelle lezioni successive ci potrà essere utile conoscere come si calcolano il tasso di variazione di un prodotto e quello di un quoziente. In altri termini, se la variabile z è il prodotto delle due variabili x e y, che relazione c'è tra il tasso di variazione di z e quelli di x e y? Una domanda analoga può essere posta quando z è uguale al rapporto di quelle due variabili. Le regole che abbiamo imparato ci consentono di trovare le risposte.

Il tasso di variazione di un prodotto. Cominciamo dal caso del prodotto: per ipotesi abbiamo cioè $z = x\,y$. Possiamo applicare la regola della variazione del prodotto, ottenendo, come sappiamo, $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$. Ora dividiamo primo e secondo membro per z, tenendo conto che, per ipotesi, si ha $z = x\,y$. Otteniamo quanto segue:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{y\Delta x}{x\,y} + \frac{x\Delta y}{x\,y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Questa è la risposta che cercavamo: al primo membro abbiamo $\tilde{z}$ e al secondo la somma di $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$:

$$\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y} \tag{8}$$

In conclusione, cioè, il tasso di variazione di un prodotto è uguale alla somma dei tassi di variazione dei due fattori.

Il tasso di variazione di un quoziente. Nel caso del quoziente, come si sarà probabilmente intuito, si arriva a un risultato analogo. Questa volta, invece della somma, abbiamo una differenza. In altri termini, se si ha $z = \frac{x}{y}$, allora per quanto riguarda i tassi di variazione si ha

$$\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y} \tag{9}$$

In conclusione, cioè, il tasso di variazione di un rapporto è uguale alla differenza tra il tasso di variazione del numeratore e quello del denominatore.[10]

5.3 L'elasticità

A questo punto possiamo introdurre il concetto di *elasticità* di una funzione. Essa è una misura della sensibilità della variabile dipendente (della y) al variare della variabile indipendente (della x). Solo che, invece di fare il rapporto tra le due variazioni espresse nelle loro unità di misura (come nel rapporto incrementale), si fa il rapporto tra le due variazioni percentuali. Indicando col simbolo η il valore dell'elasticità, si può scrivere la seguente formula:

$$\eta = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} \tag{10}$$

In precedenza abbiamo fatto un esempio sulla domanda di salsiccie in cui la variabile dipendente era q e la variabile indipendente era p, ma la formula è valida in generale e perciò l'abbiamo scritta usando i simboli y e x. Nell'esempio il valore dell'elasticità è $\eta = \frac{40\%}{50\%} = 0,8$.

[10] La strada più semplice per controllare questo risultato è la seguente: da $z = x/y$ si ricava subito l'espressione equivalente $x = zy$. Applicando la regola del tasso di variazione del prodotto si ottiene $\tilde{x} = \tilde{z} + \tilde{y}$. Risolvendo questa eguaglianza per $\tilde{z}$ si ottiene $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$, appunto il risultato che cercavamo.

Per chiarire e qualificare meglio l'argomento dell'elasticità vanno fatte alcune considerazioni.

(i) La prima è che, come rapporto tra due variazioni percentuali, l'elasticità è indipendente dalle unità di misura ovvero è, come anche si dice, un numero adimensionale.

(ii) La seconda è che, per convenzione, quando si ha a che fare con funzioni sempre decrescenti, sicché l'elasticità assume sempre valori negativi, il segno meno viene tralasciato, ossia l'elasticità viene misurata in valore assoluto. Nel precedente esempio della curva di domanda avremmo dovuto dire che l'elasticità è pari a $-0,8$, poiché quando il prezzo aumenta la quantità domandata diminuisce. Nel tralasciare il segno meno abbiamo seguito la convenzione appena detta. Naturalmente, quando l'elasticità può assumere valori sia positivi che negativi, il segno non può più essere trascurato.

(iii) La terza è che l'elasticità (considerandone il valore assoluto quando la funzione è descrescente) oscilla attorno al valore di uno, che si ha appunto quando il numeratore e il denominatore della (10) sono uguali, ossia quando sono uguali (eventualmente in valore assoluto) le due variazioni percentuali della variabile indipendente (della x) e di quella dipendente (della y). Se la y varia in percentuale *più* della x allora il rapporto è minore di uno, e si dice che (nel punto, o nel tratto considerato) la funzione è *elastica*. Se invece la y varia in percentuale *meno* della x, sicché il rapporto è maggiore di uno, si dice che la funzione è *anelastica* (o rigida). Si parla infine di *elasticità unitaria* quando il rapporto è proprio uno, ovvero quando le due variazioni percentuali sono uguali.

Il *calcolo grafico* dell'elasticità. Il *calcolo grafico* dell'elasticità è relativamente semplice. Guardando alla formula (**??**) dell'elasticità, si vede che questa è uguale al rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diviso per il rapporto tra i livelli delle due variabili $\frac{y}{x}$.[11] Siccome sappiamo già calcolare graficamente la derivata e il rapporto incrementale (col metodo del triangolo) e siccome dal grafico è facile ricavare anche il rapporto tra i livelli, si possono agevolmente combinare i due risultati per ottenere la misura dell'elasticità. Si veda

[11]Molto spesso gli economisti chiamano il valore del rapporto incrementale della funzione (della y) in un punto con l'espressione *valore marginale* della funzione. Esso misura appunto, come abbiamo visto, la variazione della y a fronte di una variazione unitaria della x, ovvero quel che succede alla funzione "al margine". Anche il rapporto y/x ha un nome; viene chiamato *valore medio* della funzione y. Esso è appunto la media di tutti i valori della x fino a quel punto. Usando questa terminologia, l'elasticità è uguale al rapporto tra il valore marginale e il valore medio della funzione.

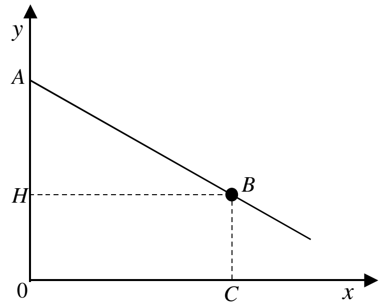

Figure 7: Il calcolo grafico dell'elasticità

la FIGURA 7. Vogliamo calcolare l'elasticità nel punto B, quella che si ha quando la x aumenta di una unità (finita o infinitesima) rispetto al livello $0C$. Il rapporto incrementale ottenuto col metodo del triangolo è pari ad $\frac{AH}{BH} = \frac{AH}{0C}$. Il rapporto tra i livelli è pari a $\frac{0H}{0C}$. Perciò l'elasticità può essere calcolata come segue:

$$\eta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y} = \frac{AH}{0C} \div \frac{0C}{0H} = \frac{AH}{0H}$$

Insomma, il valore dell'elasticità dipende da come il punto H divide il segmento $0A$. Se H si trova vicino ad A, il valore dell'elasticità è basso (come sappiamo, in questo caso si dice che nel punto B la curva è anelastica); se H si trova vicino a 0, il valore dell'elasticità è alto (e si dice che nel punto B la curva è elastica). Per trovare il valore della x in corrispondenza del quale l'elasticità della funzione è unitaria, basta cercare il punto di mezzo del segmento $0A$ e identificare sull'asse delle ascisse il valore di x che gli corrisponde.

Ovviamente, quando il grafico della funzione non è una retta ma una curva, si deve prima tracciare la retta tangente alla curva nel punto considerato e poi seguire il procedimento grafico appena illustrato. Inoltre, quando si calcola greficamente l'elasticità, vanno tenuti presenti due avvertimenti.

Il primo riguarda le funzioni crescenti (cfr. FIGURA 8): in questo caso il lettore può verificare che l'elasticità nel punto B è data da $\frac{BH}{AH} \div \frac{BH}{0H} = \frac{0H}{AH}$; ne segue che nell'esempio considerato la curva è anelastica perché il numeratore è inferiore al denominatore.

Il secondo avvertimento riguarda il fatto che molto spesso nei grafici dei modelli economici gli assi sono *invertiti*: la variabile dipendente è misurata sull'asse delle ascisse mentre quella indipendente è misurata sull'asse delle ordinate. Questo è il caso, per esempio, delle curve di domanda $q = D(p)$, dove q è misurata sull'asse delle ascisse e p su quello delle ordinate (cfr. FIGURA 9).

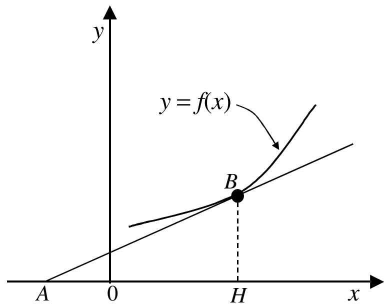

Figure 8: Il calcolo dell'elasticità quando la funzione non è lineare

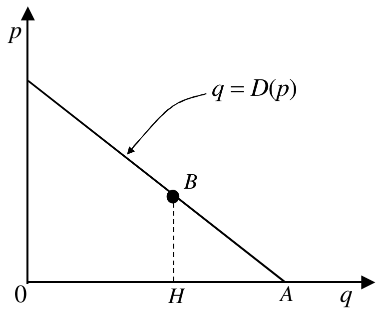

Figure 9: Il calcolo dell'elasticità quando gli assi sono invertiti

In questo caso, il rapporto incrementale è dato da $\frac{AH}{BH}$ mentre il rapporto tra i livelli è dato da $\frac{BH}{0H}$. Perciò l'elasticità è uguale al rapporto $\frac{AH}{0H}$. In questo caso, quello che conta è come viene suddiviso dal punto H il segmento sull'asse delle ascisse.

6 Esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale. Ci sono due funzioni molto importanti in economia (e non solo in economia) che è bene conoscere e di cui è bene saper calcolare i rapporti incrementali. La prima è la *funzione esponenziale* la cui formula è

$$y = a^x$$

dove il coefficiente a è un numero positivo. Il grafico della funzione esponenziale è descritto nella FIGURA 10. Se il coefficiente a è maggiore di 1, la

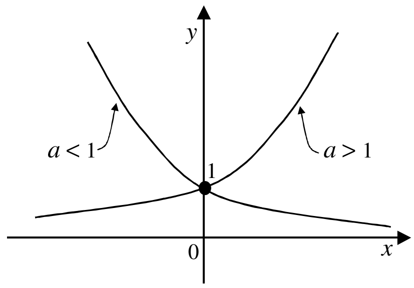

Figure 10: Il grafico della funzione esponenziale

funzione è crescente,[12] mentre se è minore di 1 la funzione è decrescente.[13] In entrambi i casi l'intercetta con l'asse delle ordinate è pari a 1 (qualsiasi numero a elevato a zero dà appunto 1). Una seconda caratteristica rilevante è che il valore di y che si ricava dalla funzione esponenziale è sempre positivo: al crescere di x quando $\alpha < 1$ (o al diminuire di x quando $a > 1$) la curva si avvicina sempre di più all'asse delle ascisse senza però raggiungerlo.[14] Vi sono due esempi di funzioni esponenziali che si ritrovano anche nelle calcolatrici tascabili: una è 10^x; l'altra è e^x, dove e è un numero irrazionale ($e \approx 2.7183$) con interessanti proprietà matematiche che viene usato come base dei logaritmi naturali (vedi qui sotto).[15]

La funzione logaritmica. Sappiamo, per averlo studiato a scuola, che il logaritmo di un numero è l'esponente a cui occorre elevare un determinato numero, detto "base", per ottenere il numero dato. La "base" può essere un

[12] Poniamo $x = t$ (dove t indica il tempo). La funzione esponenziale diventa $y = a^t$; essa ha la caratteristica che il valore della y ci mette sempre lo stesso tempo a raddoppiarsi. Per esempio, poniamo $a = 2$. quando $t = 0$ si ha $y = 2^0 = 1$; dopo un periodo si ha $y = 2^1 = 2$ (si è raddoppiato); dopo un altro periodo si ha $y = 2^2 = 4$ (si è raddoppiato ancora); nel successivo periodo si ha $y = 2^3 = 8$ (ancora un raddoppio); e così via. Naturalmente, se si ha $a < 2$ il tempo che ci vuole per ottenere ogni raddoppio è più lungo, mentre se $a > 2$ il tempo per il raddoppio è più corto. Per esempio, se si ha $a = 1.5$ il raddoppio si ha per $t \approx 1.7$.

[13] In questo caso nella funzione $y = a^t$ è il tempo di dimezzamento che è costante (si faccia la prova con $a = 0.5$ e si verificherà facilmente che in ogni periodo il valore della y si dimezza).

[14] I matematici dicono che l'asse delle ascisse è un *asintoto* della funzione esponenziale.

[15] Un altro famosissimo esempio in cui compare una funzione esponenziale è la formula dell'*interesse composto*, che dice come aumenta nel tempo una somma iniziale k_0 se viene investita al tasso di interesse costante i. La formula è $k(t) = k_0 (1 + i)^t$ dove si ha $a = 1+i$ e $x = t$; $k(t)$ è appunto il valore della somma dopo t anni.

numero qualsiasi. La più comoda è un particolare numero detto e.[16] Quando si usa come base questo numero, il logaritmo viene detto "logaritmo naturale" e viene indicato col simbolo "ln". Noi supporremo che i nostri siano sempre logaritmi naturali (anche se talvolta ci potrà capitare di scrivere "log" invece di "ln").[17]

Ai nostri fini, tuttavia, saper esattamente cosa sia un logaritmo interessa relativamente poco. Quelle che ci interessano sono alcune proprietà dei logaritmi, che consentono di semplificare enormemente le formule dei modelli. Qui di seguito elencheremo (senza dimostrazione) le principali proprietà di cui potremo fare uso.[18]

(i) Il logaritmo di uno è zero; il logaritmo di un numero maggiore di uno è positivo; il logaritmo di un numero minore di uno è negativo; il logaritmo di un numero negativo non esiste.[19]

(ii) I logaritmi consentono di trasformare i prodotti in somme, i rapporti in differenze, le potenze in prodotti e le radici in rapporti. Facciamo qualche esempio. Supponiamo che si abbia la relazione, in livelli, $z = xy$; passando ai logaritmi abbiamo $\ln z = \ln x + \ln y$. Se invece la relazione è $z = \frac{x}{y}$, passando ai logaritmi si ha $\ln z = \ln x - \ln y$. Supponiamo infine di avere la relazione $y = x^a$; passando ai logaritmi abbiamo $\ln y = a \ln x$. Ovviamente si possono fare moltissimi altri esempi. Ne facciamo un altro soltanto: la funzione esponenziale $y = e^x$. Che succede quando si passa ai logaritmi? Abbiamo, ovviamente $\ln y = x \ln e = x$;[20] la funzione logaritmica è la funzione inversa delle funzione esponenziale (e vale ovviamente anche il reciproco).

(iii) Il grafico della funzione logarimica $y = \ln x$ è una curva crescente con una inclinazione che diminuisce costantemente. Si veda la FIGURA 11. La funzione incontra l'asse delle ascisse nel punto $x = 1$ e non incontra mai l'asse delle ordinate; man mano che la x si avvicina a zero il valore di y

[16] Nella scuola secondaria, come base per i logaritmi, si usava soprattutto il numero 10. Però i logaritmi naturali hanno proprietà matematiche più comode, e perciò vengono usati di più.

[17] Spesso (soprattutto in macroeconomia) si fa uso della seguente notazione: quando la variabile è indicata con una lettera maiuscola, il logaritmo di quella variabile verrà indicato con la corrispondente lettera minuscola. Per esempio, il prodotto nazionale viene in genere indicato con Y; perciò il logaritmo del prodotto nazionale verrà indicato così: $\ln Y = y$. Analogamente avremo $\ln M = m$, $\ln P = p$ ecc.

[18] Il lettore potrà controllare queste proprietà facendo qualche prova con la calcolatrice tascabile.

[19] A rigore, il logaritmo di un numero negativo non è un "numero reale". Inoltre, man mano che il numero si avvicina allo zero, il suo logaritmo si avvicina a meno infinito.

[20] Questo risultato dipende dalla definizione di logaritmo: a quale esponente si deve elevare il numero e per ottenere il numero e? Ovviamente si deve elevare a uno; perciò $\ln e = 1$.

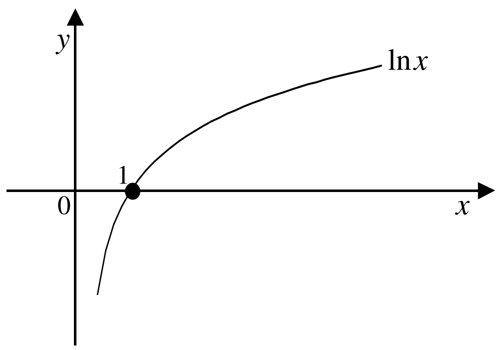

Figure 11: La funzione logaritmica

(che per $x < 1$ è ovviamente negativo) diventa in valore assoluto sempre più grande.[21]

(iv) In queste lezioni faremo talvolta uso della seguente importante proprietà (che non viene insegnata nelle scuole secondarie): $\ln(1 + x) \approx x$. L'approssimazione è tanto più "buona" quanto più "piccolo" è il valore della variabile x. Per esempio, è un'approssimazione eccellente quando x è una percentuale (come $5\% = 0,05$). Questa proprietà consente di esprimere i tassi di variazione dei livelli come *differenze* tra i loro logaritmi. Chiariamo la cosa con un esempio. Sappiamo che il tasso di variazione di una variabile, poniamo si tratti del prezzo p, è definito dalla formula $\tilde{p} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} - 1$. Possiamo perciò scrivere $1 + \tilde{p} = \frac{p_1}{p_0}$ e, passando ai logaritmi, $\ln(1 + \tilde{p}) = \ln p_1 - \ln p_0$; ora applichiamo la proprietà al primo membro; otteniamo $\tilde{p} \approx \ln p_1 - \ln p_0$. Possiamo ottenere una formula analoga per il tasso di variazione di qualsiasi variabile: $\tilde{x} = \ln x_1 - \ln x_0$.[22]

7 Sistemi di equazioni

Abbiamo detto all'inizio di queste pagine che un modello economico si compone in genere di più relazioni e quindi di più equazioni. In questi casi si parla di *sistemi di equazioni*. Il problema che si pone è allora quello di determinare

[21] L'asse delle ordinate è un asintoto della funzione logaritmica.

[22] Vediamo un'applicazione che riprende l'esempio trattato nella NOTA 15. Supponiamo di conoscere la somma investita inizialmente k_0 e la somma maturata dopo t anni e di voler sapere quale è stato il tasso di interesse. Partiamo dalla formula dell'interesse composto $k_t = k_0 (1 + i)^t$. La nostra incognita è il valore del tasso di interesse i. Per trovarlo passiamo ai logaritmi primo e secondo membro, ottenendo $\ln k_t = \ln k_0 + t \ln(1 + i)$. Se ci si accontenta dell'approssimazione si può porre $\ln(1 + i) = i$ e si ottiene facilmente $i = \frac{\ln k_t - \ln k_0}{t}$.

il valore delle variabili incognite all'interno del modello, ossia delle variabili endogene. Il modo più semplice per risolvere un sistema di equazioni è di procedere per *sostituzione*. L'idea è di ottenere da una equazione un'espressione per una variabile in termini delle altre (come funzione delle altre), sostituire questa espressione in un'altra equazione e di ricominciare da capo da quest'ultima fino a giungere a una equazione in una sola incognita.

Per chiarire quanto appena detto, ci aiutiamo come al solito con un esempio. Supponiamo che il modello sia composto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} (i) & y = a + b\,x \\ (ii) & z = c + d\,x \\ (iii) & y = z \end{cases} \tag{11}$$

Nel sistema (11) x, y e z sono le tre variabili *incognite* (le grandezze di cui si cerca il valore), mentre a, b, c e d sono i parametri, ovvero fanno parte dei *dati* del problema. Notiamo che il numero delle equazioni è uguale a quello delle incognite. Questo è il primo requisito da controllare per poter sperare di giungere a un'unica soluzione; il sistema deve avere tante equazioni per quante sono le incognite.

La soluzione algebrica. Procediamo allora per sostituzione. L'equazione (11*iii*) impone che, nella soluzione, la z sia uguale alla y. Se effettuiamo questa sostituzione nella equazione (11*ii*) avremo:

$$y = c + d\,x \tag{12}$$

Utilizzando l'equazione (11*iii*), abbiamo eliminato l'incognita z. Se ora guardiamo alle equazioni (11*i*) e (12) vediamo che esse hanno al primo membro la stessa variabile (y). Se sostituiamo il secondo membro della equazione (11*i*) nel primo membro della equazione (12) (o viceversa), rimaniamo con una sola equazione in una sola incognita:[23]

$$a + b\,x = c + d\,x$$

Non ci resta che risolvere questa equazione. Fatti i semplici calcoli, si ottiene il seguente risultato:[24]

$$x^* = \frac{c-a}{b-d} \tag{13}$$

[23] Alla stessa equazione si poteva arrivare con un altro procedimento di sostituzione, per certi versi più spiccio e più intuitivo. Si potevano, cioè, sostituire i secondi membri della (11*i*) e della (11*ii*) rispettivamente al primo e al secondo membro della (11*iii*).

[24] Nella formula (13) che esprime la soluzione il valore della x che risolve il sistema è stato contrassegnato con un asterisco proprio per enfatizzare il fatto che si tratta di un valore *particolare* della variabile (che dipende a sua volta dai valori assunti dai parametri a, b, c e d) e non di un valore *qualsiasi*. Più avanti faremo lo stesso per i valori di y e di z che risolvono il sistema.

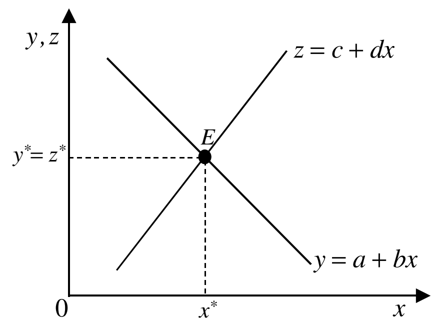

Figure 12: Rappresentazione grafica di un sistema di equazioni

Per ricavare la y (e automaticamente anche la z che per la ($11iii$) è uguale alla y), basta sostituire nella ($11i$) o nella (12) il valore della x^* appena determinato, e risolvere l'equazione risultante. In entrambi i casi si trova facilmente la stessa soluzione, che è

$$y^* = z^* = \frac{bc - ad}{b - d}$$

Il risultato trovato per la x ci consente di dire quali altri requisiti debbono essere soddisfatti perché il sistema abbia una soluzione. Se b e d sono uguali (non solo numericamente, ma anche nel segno), il risultato per x è dato da una frazione che ha un certo numero al numeratore e zero al denominatore. Una frazione così composta non ha alcun senso dal punto di vista matematico: in questo caso il sistema *non ha soluzione.* Se b e d sono uguali e sono uguali (sempre in termini algebrici) anche c e a, il risultato per x è una frazione con zero sia al numeratore che al denominatore. Anche questa frazione non ha molto senso, ma in questo caso il sistema ha (come vedremo tra poco) *infinite soluzioni.*

La soluzione grafica. Le condizioni identificate sopra divengono più intuitive se cerchiamo di "visualizzare" in termini grafici il sistema di equazioni da cui siamo partiti. Le equazioni ($11i$) e ($11ii$) sono delle rette, disposte in qualche modo sul grafico a seconda dei valori dei parametri. Una possibilità è quella rappresentata nella FIGURA 12.[25] Si noti che sulle ascisse compare la x, mentre sulle ordinate ci sono sia la y che la z. Abbiamo cioè sovrapposto i grafici delle due rette (come se uno dei due fosse disegnato su un lucido).

[25]Per come è stato disegnato il grafico si ha $a > 0$ (la retta y ha un'intercetta positiva), $b < 0$ (la retta y è descrescente), $c < 0$ (la retta z ha un'intercetta sotto l'asse delle ascisse), $d > 0$ (la retta z è crescente).

L'equazione ($11iii$) ci dice che per cercare la soluzione dobbiamo trovare quel valore di x in corrispondenza del quale la y e la z sono uguali. Ma allora la soluzione è identificata dal punto del grafico in cui le due rette si incontrano; la soluzione per l'incognita x è l'ascissa del punto di intersezione; quella delle incognite y e z (che è uguale per entrambe) è identificata dall'ordinata di quel punto. Ovviamente la soluzione ottenuta in questo modo è identica a quella ottenuta per via algebrica.

Requisiti di esistenza e di unicità. Possiamo ora riprendere in termini grafici il discorso sui requisiti che debbono essere soddisfatti perché il sistema abbia una soluzione determinata. Se nel sistema mancasse un'equazione (per esempio l'ultima, $y = z$), rimanendo così con più incognite che equazioni, non sapremmo dove cercare la soluzione, o meglio, qualsiasi valore della x andrebbe bene; ogni volta avremmo due valori per y e z ciascuno dei quali soddisferebbe una delle equazioni restanti; il sistema avrebbe infinite soluzioni. Se b e d fossero uguali (sia nel valore che nel segno), le due rette sarebbero parallele (il lettore spieghi perché) e non vi sarebbe modo, ovviamente, di trovare il punto di intersezione richiesto dalla equazione ($11iii$): il sistema non avrebbe alcuna soluzione. Infine se, oltre a b e d, fossero uguali tra loro anche a e c, allora le due rette sarebbero esattamente sovrapposte e ogni valore di x andrebbe bene; di nuovo le soluzioni sarebbero infinite.

Per concludere su questo punto, non tutti i sistemi di equazioni ammettono soluzioni determinate, e queste soluzioni dipendono comunque dai valori assunti dai parametri delle equazioni.

8 Funzioni in più variabili

Finora abbiamo lavorato con funzioni in cui una variabile (la y) dipendeva dal valore di un'altra variabile (la x). Abbiamo scritto la formula che esprime tale dipendenza con l'espressione $y = f(x)$ e abbiamo etichettato la x come variabile *indipendente* e la y come variabile *dipendente* (o, appunto, funzione).

Possiamo ora considerare funzioni in cui il valore assunto dalla variabile dipendente (continuiamo a chiamarla y) dipende dai valori assunti da *più di una* variabile indipendente, per esempio da due variabili indipendenti. Possiamo indicarle con x_1 e x_2.[26] In questo caso la formula della funzione

[26]Facciamo la solita avvertenza: qui x_1 e x_2 non rappresentano due diversi valori della stessa variabile ma due diverse variabili, ciascuna delle quali può assumere, a sua volta, diversi valori.

(che esprime la dipendenza della y dai valori assunti da ciascuna delle due variabili indipendenti) verrà scritta in questo modo:

$$y = f(x_1, x_2)$$

Come nel caso delle funzioni in una variabile l'espressione $f(.,.)$ descrive una formula generica. Possiamo ovviamente avere formule specifiche. Ne indichiamo due:

$$\begin{array}{ll} (i) & y = a_1x_1 + a_2x_2 \\ (ii) & y = x_1x_2 \end{array} \tag{14}$$

ma gli esempi possibili e i casi che incontreremo sono, ovviamente, molto numerosi.[27]

8.1 I grafici

Quando abbiamo a che fare con una funzione con due variabili indipendenti (peggio ancora se queste sono più di due) la rappresentazione grafica della funzione su un piano presenta qualche difficoltà tecnica, perché gli assi a disposizione sono solo due mentre le variabili sono (almeno) tre: la y e le due variabili indipendenti x_1 e x_2. Queste difficoltà possono essere aggirate in due modi: (i) usare una delle due variabili indipendenti (per esempio x_2) come un parametro; (ii) costruire le "curve di livello" della funzione.

Una variabile indipendente come parametro. Supponiamo di voler rappresentare graficamente la funzione $(14i)$. Per farlo fissiamo il valore della seconda variabile indipendente ponendo $x_2 = \bar{x}_2$. In questo caso la formula della funzione diventa

$$y = a_1x_1 + a_2\bar{x}_2 = k + a_1x_1$$

ossia assume la forma di una retta, dove il termine noto è pari a $k = a_2\bar{x}_2$ mentre il coefficiente angolare è pari a a_1. A questo punto non c'è nessuna difficoltà a costruire il grafico di questa retta con x_1 in ascissa e y in ordinata (vedi FIGURA $13a$). La posizione della curva (e perciò il valore di y in corrispondenza di ogni dato valore di x_1) dipende dal termine noto k, e perciò dal valore di x_2. In breve, il valore di x_2 identifica la retta mentre il

[27] Qualcuno ne abbiamo già incontrato nelle pagine precedenti. Per esempio, anche la formula (13) può essere interpretata come una funzione in più variabili indipendenti (precisamente quattro). Essa dà il valore della variabile dipendente (in questo caso x^*) in funzione dei valori assunti appunto da quattro variabili indipendenti, ossia i parametri a, b, c e d. Infatti il valore di x^* dipende, secondo la formula (13), dai valori assunti da quei quattro parametri.

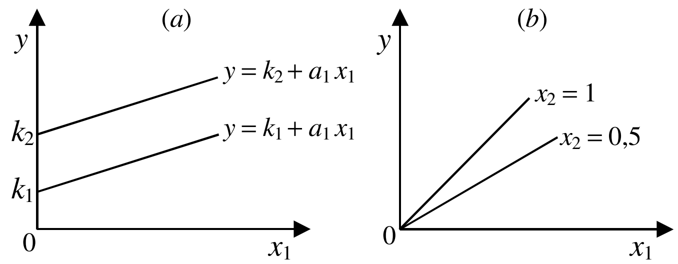

Figure 13: Una rappresentazione grafica delle funzioni con due variabili

valore di x_1 identifica il punto della retta. Nella FIGURA 13b viene rappresentata graficamente la funzione (14ii). Anche in questo caso abbiamo delle rette,[28] ma stavolta il termine noto è sempre zero e il valore di x_2 controlla il coefficiente angolare delle rette.

Le curve di livello. L'altra tecnica di costruzione del grafico misura sui due assi le variabili indipendenti x_1 e x_2. Per quanto riguarda la y, si fissa il suo valore a un livello esogenamente dato $y = \bar{y}$. Così facendo la formula della funzione identifica tutte le combinazioni di x_1 e x_2 che, inserite appunto nella formula, danno come risultato il valore $\bar{y}$. Identifica cioè una *curva di livello* della funzione, ossia tutti i punti del piano con x_1 in ascissa e x_2 in ordinata in cui appunto y ha lo stesso livello.

Illustriamo la cosa con un esempio. Riprendiamo la funzione (14i) e supponiamo che i valori dei due parametri siano $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$.[29] La formula della nostra funzione diventa allora $y = 2x_1 + x_2$ e, esplicitando x_2,

$$x_2 = y - 2x_1 \tag{15}$$

Per avere una curva di livello dobbiamo fissare il valore di y. Se, per esempio, fissiamo $y = 10$, la (15) diventa una retta decrescente (il coefficiente angolare è -2) i cui punti ci danno appunto tutte le combinazioni di x_1 e x_2 cui corrisponde il livello $y = 10$; ci danno appunto una curva di livello. Nel grafico (si veda la FIGURA 14a) il livello di y è misurato dall'intercetta sull'asse delle ordinate. Se cambiamo il valore di y, otteniamo un'altra curva di livello, che

[28]Non è sempre così. La forma delle curve nel piano di ascissa x_1 e di ordinata y dipende dalla formula della funzione $f(x_1, x_2)$. Per esempio, è facile controllare che nel caso della funzione $y = \left(ax_1 - bx_1^2\right) x_2$ la rappresentazione grafica è quella di una famiglia di parabole, tutte che passano per l'origine e che arrivano tanto più in alto quanto maggiore è il valore di x_2.

[29]Ovviamente, per i due parametri avremmo potuto scegliere altri due valori qualsiasi.

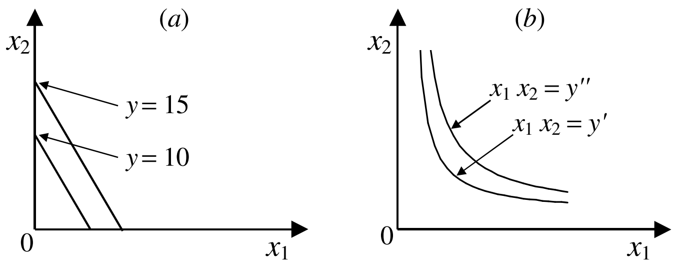

Figure 14: Curve di livello

sarà più in alto se scegliamo un valore di y più grande (nel grafico abbiamo disegnato anche la curva di livello che si ha per $y = 15$), mentre sarà più in basso se ne scegliamo uno più piccolo. Ovviamente, ci sono infinite curve di livello, una per ogni valore di y.

Nella FIGURA 14b sono riportate le curve di livello della funzione (14ii). Il procedimento è lo stesso usato in precedenza: si risolve per la variabile x_2 ottenendo la formula

$$x_2 = \frac{y}{x_1}$$

che, per ogni dato valore di y, descrive una iperbole equilatera. Nel grafico ne sono state disegnate due, una con $y = y'$ e l'altra con $y = y'' > y'$. Anche in questo caso, naturalmente, vi sono infinite curve di livello, una per ogni valore di y.